УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 2 Физико-математические науки *2009*

УДК 519.716.5

О НЕКОТОРЫХ ЗАМКНУТЫХ КЛАССАХ САМОДВОЙСТВЕННЫХ ЧАСТИЧНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

В.Б. Алексеев

Аннотация

Пусть S – класс полностью определенных функций от любого числа переменных, определенных и принимающих значения в множестве $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ и самодвойственных относительно заданной подстановки на E_k, и пусть S^* – множество всех частично определенных k-значных функций, доопределимых до функций из S. В работе для случая, когда подстановка распадается в произведение циклов одинаковой длины, описаны все замкнутые (относительно суперпозиции) классы, содержащие S и содержащиеся в S^*.

Ключевые слова: k-значная функция, частично определенная функция, замкнутый класс, самодвойственная функция.

В статье рассматриваются функции от любого числа переменных, заданные на множестве $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ и принимающие значения в этом же множестве (такие функции называют k-значными функциями). Пусть P_k – множество всех всюду определенных k-значных функций от любого числа переменных с операцией суперпозиции, а P_k^* – множество всех k-значных частично определенных функций с операцией суперпозиции (имеется в виду, что $P_k \subset P_k^*$). В статье рассматриваются некоторые классы в P_k^*, замкнутые относительно суперпозиции, и строится фрагмент решетки замкнутых классов в P_k^*, связанных с понятием самодвойственности.

Введем основные понятия. Через E_k^n мы обозначаем множество всех наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ длины n с элементами из E_k. Тот факт, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k^* не определена на наборе $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, мы будем записывать в виде $f(\widetilde{\alpha}) = *$. Если для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k^* существует функция $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ из P_k^* такая, что для любого набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ выполняется равенство $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = g(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ (если одна часть равна $*$, то и другая равна $*$), то переменная x_n называется фиктивной переменной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, и говорят, что функция $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ получается из $f(x_1, \ldots, x_n)$ изъятием фиктивной переменной x_n, а функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ получается из $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ добавлением фиктивной переменной x_n. Аналогично определяется фиктивность любой переменной.

Значение формулы $f(g_1(\widetilde{x}), \ldots, g_m(\widetilde{x}))$ на некотором наборе определяется обычным образом с дополнительным условием: если значение хотя бы одной функции g_i на этом наборе равно $*$, то значение всей формулы также равно $*$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только классы функций, содержащие тождественную функцию $f(x) = x$ (так называемые клоны). В этом случае под операцией суперпозиции можно понимать многократное применение следующих операций: произвольное переименование переменных, включая отождествление;

добавление или изъятие фиктивных переменных у любой имеющейся функции; подстановку нескольких имеющихся функций от одних и тех же переменных вместо всех переменных любой имеющейся функции. Проблемы выразимости одних функций через другие тесно связаны с понятием замкнутого класса.

Определение. Класс функций называется *замкнутым*, если при применении операции суперпозиции к любым функциям из этого класса получаются снова функции из этого же класса.

Все замкнутые классы в P_2 описаны Постом – их счетное число. Известно, что замкнутых классов в P_k континуум для всех $k \geq 3$, а в P_k^* – континуум для всех $k \geq 2$. Однако некоторые фрагменты решетки замкнутых классов удается описать. В частности, в P_k описаны все предполные классы (замкнутые классы, которые содержатся только в одном другом замкнутом классе – P_k). В P_k^* все предполные классы для $k = 2$ описаны Р.В. Фрейвалдом [1], для $k = 3$ – Б.А. Ромовым [2], для произвольного k – Ло Чжукаем [3]. Предполных классов в P_k^* конечное число при каждом k.

Очевидно, что каждый замкнутый класс всюду определенных k-значных функций является замкнутым классом в P_k^*. Известно, что класс P_k всех всюду определенных k-значных функций содержится только в двух других замкнутых классах из P_k^*, а именно: он содержится в замкнутом классе $P_k \cup \{*\}$, где $\{*\}$ – множество всех нигде не определенных функций от любого числа переменных, который, в свою очередь, содержится только в замкнутом классе P_k^*.

Определение. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^*$. *Областью определенности* функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть множество наборов $D(f) = \{\widetilde{\alpha} | f(\widetilde{\alpha}) \neq *\}$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^*$ и $g(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$. Будем говорить, что g является *доопределением* функции f, если они совпадают на области определенности функции f.

В работе [4] были рассмотрены некоторые фрагменты решетки замкнутых классов в P_2^*, а именно замкнутые классы, содержащие какой-либо из 5 предполных классов алгебры логики. Установлено, что для каждого из предполных классов алгебры логики, кроме класса линейных функций, существует ровно 9 замкнутых классов из P_2^*, содержащих данный класс (включая его самого), а между классом полностью определенных булевых линейных функций и классом функций из P_2^*, доопределимых до линейных, имеется континуум замкнутых классов. Расширение этих исследований с предполных классов в P_2 на произвольные замкнутые классы в P_2 и на предполные классы в P_k представлено в ряде работ авторов: B. Strauch, D. Lau, L. Haddad, I. Rosenberg. Изложение этих результатов можно найти в монографии D. Lau [5].

В настоящей работе рассматривается алгебра P_k^* и в ней изучается фрагмент $F(S, S^*)$ решетки замкнутых классов между классом S всех полностью определенных k-значных функций, самодвойственных относительно некоторой подстановки, и классом S^* всех функций из P_k^*, доопределимых до функций из S.

Определение. Пусть σ – произвольная подстановка на множестве $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k называется *самодвойственной* относительно подстановки σ, если $f(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) \equiv \sigma(f(x_1, \ldots, x_n))$. В дальнейшем, если $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, то через $\sigma(\widetilde{x})$ будем обозначать набор $(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))$.

Пусть S – множество всех полностью определенных k-значных функций, самодвойственных относительно подстановки σ, и S^* – множество всех функций из P_k^*, доопределимых до функций из S. Известно, что S – замкнутый класс.

Ниже мы полностью опишем фрагмент $F(S, S^*)$, состоящий из всех замкнутых классов в P_k^*, лежащих между классами S и S^*, при некоторых ограничениях на подстановку σ.

В работе [6] этот фрагмент был полностью описан (без доказательств) для случая подстановки $x+1 \pmod k$. В частности, оказывается, что число классов в этом фрагменте конечно при любом k. В настоящей работе рассматриваются более общие подстановки, а именно любые подстановки, распадающиеся на циклы одинаковой длины m. Оказывается, что фрагмент $F(S, S^*)$ при этом опять остается конечным, а его структура зависит только от длины циклов, на которые распадается подстановка, и не зависит от числа циклов (в работе [7] рассмотрен случай простого m и доказана конечность этого фрагмента; здесь для произвольного натурального m дается явное описание всех замкнутых классов из фрагмента $F(S, S^*)$).

Докажем сначала два общих утверждения о замкнутых классах в P_k^*.

Лемма 1. *Пусть $G \subseteq P_k$, G – замкнутый класс и G^* – множество всех функций из P_k^*, доопределимых до функций из G. Тогда G^* – замкнутый класс в P_k^*.*

Доказательство. 1) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in G^*$. Тогда для f существует доопределение $f'(x_1, \ldots, x_n) \in G$. Пусть функции $g(y_1, \ldots, y_n)$ и $g'(y_1, \ldots, y_n)$ получены из f и f' одним и тем же переименованием переменных. Тогда g' является доопределением функции g, и $g' \in G$ в силу замкнутости класса G. Отсюда $g \in$ $\in G^*$, то есть G^* замкнуто относительно переименования переменных.

2) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in G^*$ и x_n – фиктивная переменная функции f. Пусть функция $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ получается из f изъятием x_n. Поскольку x_n – фиктивная переменная функции f, то существует ее доопределение $f'(x_1, \ldots, x_n) \in G$, в котором переменная x_n – фиктивная. Пусть функция $g'(x_1, \ldots, x_{n-1})$ получается из $f'(x_1, \ldots, x_n)$ изъятием x_n. Тогда g' является доопределением функции g, и $g' \in G$ в силу замкнутости класса G. Отсюда $g \in G^*$, то есть G^* замкнуто относительно изъятия фиктивной переменной. Аналогично доказывается замкнутость G^* относительно добавления фиктивных переменных.

3) Пусть $h(\widetilde{x}) = f(g_1(\widetilde{x}), \ldots, g_m(\widetilde{x}))$, где все $g_j \in G^*$ и $f(y_1, \ldots, y_m) \in G^*$. Тогда в G существуют функции $f'(y_1, \ldots, y_m) \in G$, $g_j'(\widetilde{x}) \in G, j = 1, \ldots, m$, являющиеся доопределением функций $f(y_1, \ldots, y_m)$, $g_j(\widetilde{x}), j = 1, \ldots, m$. При этом функция $h'(\widetilde{x}) = f'(g_1'(\widetilde{x}), \ldots, g_m'(\widetilde{x}))$ является доопределением функции h и лежит в G в силу замкнутости G. Следовательно, $h \in G^*$. Получаем, что класс G^* замкнут относительно суперпозиции.

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть $G \subseteq P_k$, G – замкнутый класс и G содержит функцию $\varphi(x) = x$. Пусть G^* – класс всех функций из P_k^*, доопределимых до функций из G, $G \subseteq B \subseteq G^*$ и B – замкнутый класс. Тогда если $f(x_1, \ldots, x_n) \in B$, $h(x_1, \ldots, x_n) \in$ $\in G^*$, $D(h) = D(f)$, то $h \in B$ (здесь $D(h)$ и $D(f)$ – области определенности функций h и f).*

Доказательство. По условию в G содержится функция $p(x_1, x_2) \equiv x_1$. Так как $h(x_1, \ldots, x_n) \in G^*$, то существует функция $h'(x_1, \ldots, x_n) \in G$, являющаяся доопределением функции h. Рассмотрим функцию $h''(x_1, \ldots, x_n) =$ $= p(h'(x_1, \ldots, x_n), f(x_1, \ldots, x_n))$. Так как $p \in B$, $h' \in B$, $f \in B$ и B – замкнутый класс, то $h'' \in B$. При этом $D(h'') = D(f) = D(h)$ и на этой области определенности h'' совпадает с h', а значит, и с h. Следовательно, $h''(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n)$ и $h \in B$. Лемма доказана. □

Таким образом, если G – замкнутый класс в P_k, то для описания любого замкнутого класса B между G и G^* достаточно указать все возможные области определенности у функций из B.

Пусть $k = m \cdot q$ и зафиксирована некоторая подстановка σ на множестве $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, которая распадается в произведение q независимых циклов длины m. Очевидно, что σ^m – тождественная подстановка и σ^i не является тождественной подстановкой при $0 < i < m$. Пусть S – множество всех полностью определенных k-значных функций, самодвойственных относительно подстановки σ, и S^* – множество всех функций из P_k^*, доопределимых до функций из S. Известно, что S – замкнутый класс и, более того, если m – простое число, то класс S является предполным в P_k [8].

Ниже мы полностью опишем фрагмент $F(S, S^*)$, состоящий из всех замкнутых классов в P_k^*, лежащих между классами S и S^*, для подстановок указанного выше типа.

Определение. Пусть M – произвольное непустое семейство подмножеств из множества $E_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ (в M может входить и пустое подмножество). Семейство M будем называть *циклически инвариантным* (относительно зафиксированной выше подстановки σ, распадающейся в прозведение q циклов длины m), если для любого подмножества $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\} \in M$ и любого j имеем $\{i_1 + j, i_2 + j, \ldots, i_s + j\} \in M$ (сложение по модулю m).

Определение. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in S^*$. Тогда через M_f обозначим семейство подмножеств из множества $E_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, удовлетворяющее двум условиям:

1) для любого набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ множество $\{i | i \in E_m, f(\sigma^i(\widetilde{\alpha})) = f(\sigma^i(\alpha_1), \ldots, \sigma^i(\alpha_n)) = *\}$ принадлежит M_f;

2) для любого подмножества A из M_f существует набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такой, что множество $\{i | i \in E_m, f(\sigma^i(\alpha_1), \ldots, \sigma^i(\alpha_n)) = *\} = A$.

Если в п. 2) мы вместо набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ возьмем набор $\sigma^j(\widetilde{\alpha}) = (\sigma^j(\alpha_1), \ldots, \sigma^j(\alpha_n))$, то вместо подмножества $A = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ получим подмножество $A - \{j\} = \{i_1 - j, i_2 - j, \ldots, i_s - j\}$ (вычитание по модулю m). Следовательно, M_f – циклически инвариантно.

Определение. Пусть M – произвольное непустое семейство подмножеств из множества $E_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ (в M может входить и пустое подмножество). Тогда через $U(M)$ обозначим множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ из S^* таких, что $M_f \subseteq M$.

Так как M_f циклически инвариантно, то имеет смысл рассматривать только циклически инвариантные семейства M. Очевидно, что если $M_1 \subseteq M_2$, то $U(M_1) \subseteq U(M_2)$.

Пусть $F(S, S^*)$ – множество всех замкнутых классов между S и S^*. Основной результат настоящей статьи – следующая теорема.

Теорема. *При любом k для любой подстановки σ на E_k, распадающейся в произведение независимых циклов одинаковой длины m (и без неподвижных точек), фрагмент $F(S, S^*)$ содержит конечное число замкнутых классов и все эти классы взаимно однозначно (с точностью до порядка слагаемых) представляются в виде $U(M_1) \cup U(M_2) \cup \cdots \cup U(M_s)$, где $M_1, M_2, \ldots, M_s$ – семейства подмножеств из E_m, удовлетворяющие условиям:*

1) каждое M_i циклически инвариантно и вместе с любыми двумя подмножествами содержит и их объединение;

2) ни одно M_i не содержится в другом M_j;
3) ровно для одного i выполняется $\emptyset \in M_i$;
4) $\forall i, j \ \exists t \ \forall A, B: \ (A \in M_i, \ B \in M_j \Longrightarrow A \cup B \in M_t)$.

Доказательство теоремы мы разобьем на ряд лемм.

Лемма 3. *Если набор семейств подмножеств $M_1, M_2, \ldots, M_s$ удовлетворяет условию 4), то для любых $i_1, i_2, \ldots, i_p$ существует t такое, что для любых подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_p$ из E_m выполняется импликация:*

$$A_1 \in M_{i_1}, \ A_2 \in M_{i_2}, \ldots, \ A_p \in M_{i_p} \Longrightarrow A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p \in M_t.$$

Доказательство. Проведем индукцию по p. При $p = 1$ утверждение очевидно. При $p = 2$ утверждение совпадает с условием 4) и выполняется по условию леммы. Пусть утверждение выполняется при $p = q$, докажем, что тогда оно выполняется и при $p = q + 1$. Рассмотрим произвольные индексы $i_1, i_2, \ldots, i_{q+1}$. По предположению индукции существует t_1 такое, что для любых подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_q$ из E_m выполняется импликация:

$$A_1 \in M_{i_1}, A_2 \in M_{i_2}, \ldots, A_q \in M_{i_q} \Longrightarrow A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_q \in M_{t_1}. \tag{1}$$

По условию 4) для пары $t_1, q + 1$ существует индекс t_2 такой, что выполняется импликация:

$$A \in M_{t_1}, B \in M_{i_{q+1}} \Longrightarrow A \cup B \in M_{t_2}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем, что для любых подмножеств A_1, A_2, $\ldots$, A_{q+1} из E_m выполняется импликация:

$$A_1 \in M_{i_1}, \ldots, A_q \in M_{i_q}, A_{q+1} \in M_{i_{q+1}} \Longrightarrow A_1 \cup \cdots \cup A_q \cup A_{q+1} \in M_{t_2}.$$

Следовательно, утверждение леммы выполняется и при $p = q + 1$, и лемма доказана. □

Лемма 4. *Пусть набор семейств подмножеств $M_1, M_2, \ldots, M_s$ из E_m удовлетворяет условиям 1) и 4). Тогда класс $U(M_1) \cup U(M_2) \cup \cdots \cup U(M_s)$ замкнут относительно суперпозиции.*

Доказательство. Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in U(M_1) \cup U(M_2) \cup \cdots \cup U(M_s)$. Тогда существует j такое, что $f(x_1, \ldots, x_n) \in U(M_j)$, то есть $M_f \subseteq M_j$. Если функция g получается из f переименованием переменных без отождествления, то, очевидно, $M_g = M_f$. Если g получается из f переименованием переменных с отождествлением, то $M_g \subseteq M_f$. В любом случае $M_g \subseteq M_j$ и $g \in U(M_j)$. Пусть $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ получается из f изъятием фиктивной переменной x_n. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – произвольный набор и $\widetilde{\beta} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$. Тогда $g(\sigma^i(\widetilde{\beta})) = f(\sigma^i(\widetilde{\alpha}))$ и $\{i | i \in E_m, f(\sigma^i(\widetilde{\alpha})) = *\} = \{i | i \in E_m, g(\sigma^i(\widetilde{\beta})) = *\}$. Следовательно, $M_g = M_f$ и $g \in U(M_j)$. Аналогично показывается, что $U(M_j)$ замкнуто относительно добавления фиктивных переменных.

Пусть теперь $h(\widetilde{x}) = f(g_1(\widetilde{x}), \ldots, g_p(\widetilde{x}))$, где все $g_j \in U(M_1) \cup U(M_2) \cup \cdots \cup U(M_s)$ и $f(y_1, \ldots, y_p) \in U(M_1) \cup U(M_2) \cup \cdots \cup U(M_s)$. Это означает, что для всех j существует M_{i_j} такое, что $M_{g_j} \subseteq M_{i_j}$, и для f существует M_l такое, что $M_f \subseteq M_l$. По лемме 3 существует M_t такое, что выполняется импликация:

$$A_1 \in M_{i_1}, \ldots, A_p \in M_{i_p}, \ A_{p+1} \in M_l \Longrightarrow A_1 \cup \cdots \cup A_p \cup A_{p+1} \in M_t. \tag{3}$$

Докажем, что тогда $h(\widetilde{x}) \in U(M_t)$. Рассмотрим произвольный набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Так как все $g_j \in S^*$ (по определению множеств $U(M)$), то для каждой функции g_j существует доопределение g'_j, лежащее в классе S. Пусть $g'_j(\widetilde{\alpha}) = \beta_j$ при всех j. Тогда $g'_j(\sigma^i(\widetilde{\alpha})) = \sigma^i(\beta_j)$ при всех j и i. Поэтому

$$\{i | i \in E_m, h(\sigma^i(\widetilde{\alpha})) = *\} = \bigcup_{j=1}^{p} \{i | i \in E_m, g_j(\sigma^i(\widetilde{\alpha})) = *\} \bigcup \{i | i \in E_m, f(\sigma^i(\widetilde{\beta})) = *\}.$$

Из импликации (3) следует, что это множество содержится в семействе M_t. Получаем, что $M_h \subseteq M_t$, откуда, по определению, $h \in U(M_t)$. Таким образом, класс $U(M_1) \cup U(M_2) \cup \dots \cup U(M_s)$ замкнут относительно суперпозиции. Лемма доказана. □

Усилением леммы 2 для $G = S$ являются следующие леммы.

Лемма 5. *Если B – замкнутый класс, $S \subseteq B \subseteq S^*$ и $f(x_1, \dots, x_n) \in B$, то $U(M_f) \subseteq B$.*

Доказательство. Пусть $h(y_1, \dots, y_s) \in U(M_f)$. Все k^s наборов из E_k^s можно разбить на k^s/m непересекающихся групп по m наборов вида $\{\widetilde{\beta}_l, \sigma(\widetilde{\beta}_l), \sigma^2(\widetilde{\beta}_l), \dots, \sigma^{m-1}(\widetilde{\beta}_l)\}$, зафиксировав k^s/m наборов $\widetilde{\beta}_l$. Построим функции $g_1(y_1, \dots, y_s), \dots, g_n(y_1, \dots, y_s)$ по следующему правилу. Рассмотрим один из фиксированных выше наборов $\widetilde{\beta}_l$. Пусть для него $\{i | i \in E_m, h(\sigma^i(\widetilde{\beta}_l)) = *\} = A$. Так как $h(y_1, \dots, y_s) \in U(M_f)$, то $A \in M_f$, и, следовательно, существует набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_k^n$ такой, что $\{i | i \in E_m, f(\sigma^i(\widetilde{\alpha})) = *\} = A$. Положим $g_r(\sigma^i(\widetilde{\beta}_l)) = \sigma^i(\alpha_r)$ при всех i и r. Аналогично определим все g_r для всех наборов $\widetilde{\beta}_l$. Тогда все $g_r \in S$. При этом

$$f(g_1(\sigma^i(\widetilde{\beta}_l)), \dots, g_n(\sigma^i(\widetilde{\beta}_l))) = f(\sigma^i(\alpha_1), \dots, \sigma^i(\alpha_n)) = * \Longleftrightarrow h(\sigma^i(\widetilde{\beta}_l)) = *,$$

то есть области определенности функций $f(g_1(y_1, \dots, y_s), \dots, g_n(y_1, \dots, y_s))$ и $h(y_1, \dots, y_s)$ совпадают. Так как все $g_r \in S \subseteq B$, $f \in B$ и B – замкнутый класс, то $f(g_1(y_1, \dots, y_s), \dots, g_n(y_1, \dots, y_s)) \in B$. Тогда по лемме 2 и $h \in B$. Лемма доказана. □

Определение. Через $\bar{M}_f$ будем обозначать семейство всех подмножеств из E_m, каждое из которых является объединением нескольких подмножеств из M_f (замыкание M_f относительно объединения). Так как $M_f \subseteq \bar{M}_f$, то $U(M_f) \subseteq U(\bar{M}_f)$.

Лемма 6. *Если B – замкнутый класс, $S \subseteq B \subseteq S^*$ и $f(x_1, \dots, x_n) \in B$, то $U(\bar{M}_f) \subseteq B$.*

Доказательство. Пусть $h(y_1, \dots, y_s) \in U(\bar{M}_f)$. Пусть наборы $\widetilde{\beta}_l$ зафиксированы как в предыдущей лемме. По условию для каждого $\widetilde{\beta}_l$ имеем: $\{i | h(\sigma^i(\widetilde{\beta}_l)) = *\} = A_1 \cup A_2 \dots \cup A_t$, где все $A_j \in M_f$. Выбрав максимальное t по всем $\widetilde{\beta}_l$, будем считать, что t для всех $\widetilde{\beta}_l$ одинаково – для этого достаточно продублировать некоторые A_j.

Определим функции $g_j(y_1, \dots, y_s)$, $j = 1, 2, \dots, t$. Рассмотрим один из фиксированных выше наборов $\widetilde{\beta}_l$. Положим $\{i | g_j(\sigma^i(\widetilde{\beta}_l)) = *\} = A_j$ и $g_j(y_1, \dots, y_s) \equiv y_1$ на остальных наборах $\sigma^i(\widetilde{\beta}_l)$. Так поступим для каждого $\widetilde{\beta}_l$. Тогда каждая функция $g_j \in U(M_f)$ и, следовательно, $g_j \in B$ по лемме 5. Функция $p(x_1, \dots, x_n) \equiv x_1 \in S$ и, следовательно, $p \in B$. Так как B – замкнутый класс, то $p(g_1(y_1,\ldots,y_s),\ldots,g_t(y_1,\ldots,y_s)) \in B$ и для любого $\widetilde{\beta}_l$ имеем $\{i|i \in E_m, p(g_1(\sigma^i(\widetilde{\beta}_l)),\ldots,g_t(\sigma^i(\widetilde{\beta}_l))) = *\} = A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_t$, то есть области определенности функций $p(g_1(y_1,\ldots,y_s),\ldots,g_t(y_1,\ldots,y_s))$ и $h(y_1,\ldots,y_s)$ совпадают. Тогда по лемме 2 и $h \in B$. Лемма доказана. □

Лемма 7. *Если B – замкнутый класс, $S \subseteq B \subseteq S^*$, то $B = \bigcup\limits_{f\in B} U(\bar{M}_f)$.*

Доказательство. Так как $f \in U(\bar{M}_f)$, то $B \subseteq \bigcup\limits_{f\in B} U(\bar{M}_f)$. Обратное включение вытекает из леммы 6. □

Лемма 8. *Пусть M – семейство подмножеств из E_m и пусть M циклически инвариантно. Тогда существует функция $f \in U(M)$ такая, что $M_f = M$.*

Доказательство. Пусть M состоит из подмножеств $A_1,\ldots,A_p$. Выберем любое n так, чтобы $k^n/m \geq p$, и определим функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ следующим образом. Пусть все k^n наборов из E_k^n распадаются на k^n/m непересекающихся групп по m наборов $\{\widetilde{\alpha}_q, \sigma(\widetilde{\alpha}_q), \sigma^2(\widetilde{\alpha}_q),\ldots,\sigma^{m-1}(\widetilde{\alpha}_q)\}$, $q = 1,2,\ldots,k^n/m$. Для каждого $\widetilde{\alpha}_q, q = 1,2,\ldots,p$ положим $\{r|f(\sigma^r(\widetilde{\alpha}_q)) = *\} = A_q$. На всех оставшихся наборах положим $f(x_1,\ldots,x_n) \equiv x_1$. Тогда $f \in S^*$ и $M_f = M$ (мы учли циклическую инвариантность M). При этом по определению $f \in U(M)$. □

Лемма 9. *Если B – замкнутый класс, $S \subseteq B \subseteq S^*$, то существует конечное число семейств подмножеств $M_1,\ldots,M_s$ из E_m, удовлетворяющих условиям 1), 2), 4) теоремы, для которых $B = U(M_1) \cup \cdots \cup U(M_s)$.*

Доказательство. Так как все $\bar{M}_f$ в лемме 7 – семейства подмножеств множества $E_m = \{0,1,\ldots,m-1\}$ и m фиксировано, то среди них есть лишь конечное число различных семейств подмножеств $M'_1,\ldots,M'_q$. При этом $B = U(M'_1) \cup \cdots \cup U(M'_q)$. Из определения $U(M)$ очевидно, что если $M_i \subseteq M_j$, то $U(M_i) \subseteq U(M_j)$. Пусть $M_1,\ldots,M_s$ – те семейства подмножеств среди $M'_1,\ldots,M'_q$, которые не содержатся в других семействах подмножеств из этого списка. Тогда $B = U(M_1) \cup \cdots \cup U(M_s)$. При этом семейства подмножеств $M_1,\ldots,M_s$ удовлетворяют условию 2) теоремы. Так как для каждого M_j существует функция $f \in B \subseteq S^*$, для которой $M_j = \bar{M}_f$, то каждое M_j удовлетворяет условию 1) теоремы, поскольку M_f циклически инвариантно, а $\bar{M}_f$ является замыканием M_f относительно объединения подмножеств. Осталось показать, что семейства подмножеств $M_1,\ldots,M_s$ удовлетворяют условию 4) теоремы.

Рассмотрим произвольные M_i и M_j. Так как M_i и M_j циклически инвариантны, то по лемме 8 существуют функции $f(x_1,\ldots,x_n) \in U(M_i)$ и $g(y_1,\ldots,y_l) \in U(M_j)$ такие, что $M_f = M_i$ и $M_g = M_j$. При этом $f \in B$ и $g \in B$. Пусть $p(x_1,x_2) \equiv x_1$. Рассмотрим функцию $h(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_l) = p(f(x_1,\ldots,x_n), g(y_1,\ldots,y_l))$. Так как $p \in S \subseteq B$ и B – замкнутый класс, то $h \in B = U(M_1) \cup \cdots \cup U(M_s)$. Следовательно, найдется t такое, что $h \in U(M_t)$, то есть $M_h \subseteq M_t$. Пусть $A \in M_i$, $B \in M_j$. Тогда существуют наборы $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in E_k^n$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1,\ldots,\beta_l) \in E_k^l$ такие, что $\{r|f(\sigma^r(\widetilde{\alpha})) = *\} = A$ и $\{r|g(\sigma^r(\widetilde{\beta})) = *\} = B$. Тогда $\{r|h(\sigma^r(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})) = *\} = \{r|h(\sigma^r(\widetilde{\alpha}),\sigma^r(\widetilde{\beta})) = *\} = A \cup B$. Отсюда $A \cup B \in M_h \subseteq M_t$, и условие 4) теоремы выполняется. Лемма полностью доказана. □

Доказательство теоремы. а) Пусть выполняются условия 1)–4) теоремы. Тогда по лемме 4 класс $U(M_1) \cup \cdots \cup U(M_s)$ замкнут. По определению, $U(M) \subseteq S^*$ для любого M. Поэтому $U(M_1) \cup \cdots \cup U(M_s) \subseteq S^*$. Для любой функции

$f(x_1, \ldots, x_n) \in S$ имеем $M_f = \{\emptyset\}$. Поэтому если $\emptyset \in M$, то $S \subseteq U(M)$. Тогда из условия 3) вытекает, что $S \subseteq U(M_1) \cup \cdots \cup U(M_s)$, то есть $U(M_1) \cup \cdots \cup U(M_s)$ – замкнутый класс, принадлежащий фрагменту $F(S, S^*)$.

б) Пусть B – произвольный замкнутый класс, принадлежащий фрагменту $F(S, S^*)$. Тогда по лемме 9 B можно представить в виде $B = U(M_1) \cup \cdots \cup U(M_s)$, где $M_1, M_2, \ldots, M_s$ удовлетворяют условиям 1), 2), 4) теоремы. Покажем, что тогда выполняется и условие 3). Так как B принадлежит фрагменту $F(S, S^*)$, то $S \subseteq B$. Пусть f – любая функция из S. Тогда $M_f = \{\emptyset\}$. Так как $f \in B$, то существует i такое, что $f \in U(M_i)$, то есть $M_f \subseteq M_i$ и $\emptyset \in M_i$. Допустим, что существуют два семейства подмножеств M_i и M_j такие, что $\emptyset \in M_i$ и $\emptyset \in M_j$. Тогда для них существует M_t, удовлетворяющее условию 4). При этом для любых $A \in M_i$, $B \in M_j$ выполняется: $A \cup \emptyset = A \in M_t$ и $\emptyset \cup B = B \in M_t$. Отсюда $M_i \subseteq M_t$, $M_j \subseteq M_t$. Тогда $i = t = j$ по условию 2). Следовательно, условие 3) выполняется, то есть выполняются все условия 1)–4).

в) Докажем единственность представления. Пусть один и тот же замкнутый класс B имеет два представления $B = U(M_1) \cup \cdots \cup U(M_s) = U(M'_1) \cup \cdots \cup U(M'_l)$, где каждый из наборов семейств подмножеств $M_1, M_2, \ldots, M_s$ и $M'_1, M'_2, \ldots, M'_l$ удовлетворяет условиям 1)–4) теоремы. Так как M_1 – циклически инвариантно по условию 1), то по лемме 8 получаем, что существует функция $f \in U(M_1)$ такая, что $M_f = M_1$. При этом $f \in B$, и, следовательно, существует j такое, что $f \in U(M'_j)$. Это означает, что $M_f \subseteq M'_j$, то есть $M_1 \subseteq M'_j$. Аналогично получаем, что существует q такое, что $M'_j \subseteq M_q$, откуда $M_1 \subseteq M_q$. Тогда по условию 2) имеем $q = 1$ и $M_1 \subseteq M'_j \subseteq M_1$, то есть $M'_j = M_1$. Таким образом, для любого семейства подмножеств из одного набора найдется совпадающее с ним семейство подмножеств из второго набора и наоборот, то есть наборы семейств подмножеств $M_1, M_2, \ldots, M_s$ и $M'_1, M'_2, \ldots, M'_l$ совпадают (с точностью до порядка подмножеств).

Теорема полностью доказана. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 09-01-00701 и 07-01-00154).

Summary

V.B. Alekseev. On Some Closed Classes of Self-dual Partial Many-valued Functions.

Let S be a class of fully defined functions of any number of variables that are defined and take values in the set $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ and are self-dual under given permutation on E_k. Let S^* be the set of all partially defined k-valued functions that can be extended to functions from S. In this paper all closed classes (under superposition) that contain S and are contained in S^* are described for the case when permutation is the product of non-intersecting cycles of the same length.

Key words: k-valued function, partially defined function, closed class, self-dual function.

Литература

1. *Фрейвалд Р.В.* Критерий полноты для частичных функций алгебры логики и многозначной логики // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 167. – С. 1249–1250.

2. *Ромов Б.А.* О максимальных подалгебрах алгебры частичных функций многозначной логики // Кибернетика. – 1980. – Т. 1. – С. 28–35.

3. *Lo Czukai.* The completeness theory of partial many-valued logic functions // Acta Math. Sinica. – 1984. – V. 27. – P. 676–683 (на кит. яз.). = *Ло Чжукай.* Теория полноты для частичных функций многозначной логики // Кибернет. сб. – М.: Мир, 1988. – Вып. 25. – С. 142–161.]

4. *Алексеев В.Б., Вороненко А.А.* О некоторых замкнутых классах в частичной двузначной логике // Дискр. матем. – 1994. – Т. 6, Вып. 4. – С. 58–79.

5. *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets. A basic course on many-valued logic and clone theory. – Springer, 2006. – 668 с.

6. *Алексеев В.Б.* О некоторых замкнутых классах частичных многозначных самодвойственных функций // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. докл. 15 междунар. конф. / Под ред. Ю.И. Журавлева. – Казань: Отечество, 2008. – С. 5.

7. *Haddad L., Lau D., Rosenberg I.G.* Intervals of partial clones containing maximal clones // J. Automata, Language and Combinatorics. – 2006. – V. 11, No 4. – P. 399–421.

8. *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. – 1958. – Т. 51. – С. 5–142.

Поступила в редакцию
16.02.09

Алексеев Валерий Борисович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

E-mail: *vbalekseev@rambler.ru*